LÖSNINGAR PÅ MS6110 SANNOLIKHETSTEORI, GU
TISDAGEN 25/10 2016.
OLLE NERMAN

---

1. a. $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(-\ln U \le y) = P(\ln U \ge -y) =$

$$= P(U \ge e^{-y}) = \begin{cases} 0 & \text{om } y \le 0 \\ 1-e^{-y} & \text{om } y > 0 \end{cases}$$

b. $$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{om } y \le 0 \\ e^{-y} & \text{om } y > 0 \end{cases}$$

---

2. a. OM DET BARA ÄR FLICKOR I EN GRUPP SÅ ÄR DET AUTOMATISKT BARA POJKAR I DEN ANDRA. FÖR VAR OCH EN AV DE TVÅ GRUPPERNA ÄR SANNOLIKHETEN FÖR BARA FLICKOR I DEN GRUPPEN

$$\frac{\binom{3}{3}\binom{3}{0}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{20}$$. SVARET BLIR DÄRFÖR $2 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$

b. MAN KAN T. EX OBSERVERA ATT HÄNDELSEN ÄR KOMPLEMENTHÄNDELSE TILL DEN SOM a-UPPGIFTEN BEHANDLAR. $\Rightarrow$ SVARET BLIR $= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

---

3. LÅT A VARA "HUVUDVÄRKSSYMPTOM" OCH B VARA "SJUKSKRIVEN". SÖKT ÄR $P(A^c|B)$. VI VET ATT $P(A) \approx 0{,}15$, $P(B|A) \approx 0{,}5$ OCH $P(A) \approx 0{,}27$. DESSA OCH BAYES FORMEL GER

$$P(A^c|B) = 1 - P(A|B) = 1 - \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} \approx$$

$$1 - \frac{0{,}15 \cdot 0{,}5}{0{,}27} \approx 0{,}722$$

FORTS. LÖSNINGAR MSG110 25/10 2016 . OLLE NERMAN

4. NORMALAPPROXIMATIONSINTERVALL

$$p = \hat{p} \pm 2{,}58 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \qquad (\approx 99\%)$$

DÄR $\hat{p}$ = RELATIVA FREKVENSEN FÖR HÄNDELSEN, D.V.S. MEDELVÄRDET AV BERNOULLI-VARIABLERNA.
LÄNGDEN AV DETTA INTERVALL ÄR

$$2 \cdot 2{,}58 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq 2 \cdot 2{,}58 \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{2{,}58}{\sqrt{n}}$$

$$\left(\text{TY } \hat{p}(1-\hat{p}) \leq \tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{1}{2}\right) \right).$$

$$\frac{2{,}58}{\sqrt{n}} \leq 0{,}05 \Rightarrow n \geq \left(\frac{2{,}58}{0{,}05}\right)^2 \approx 2663$$

5. SE LÄROBOKEN

6 a. $L(c) = L(c;x) = \dfrac{(200c)^x e^{-200c}}{x!}$

$$\frac{d \ln L(c)}{dc} = 0 \qquad \frac{x}{c} - 200 = 0 \Rightarrow \hat{c} = \frac{x}{200}$$

(+ EV. VISA ATT DETTA ÄR EN MAXPUNKT PÅ LÄMPLIGT VIS)

TEORETISK ML-SKATTNING ÄR $\dfrac{X}{200}$.

b. $E\left[\dfrac{X}{200}\right] = \dfrac{E[X]}{200} = \dfrac{200c}{200} = c$ SÅ $\hat{c}$ ÄR V.V.R.

c. OBSERVERAT $\hat{c} = \frac{238}{200} \approx 1{,}19$. STANDARDFELET ÄR, EFTERSOM $\hat{c}$ V.V.R., LIKA MED $\sqrt{V\!AR(\hat{c})}$ =

$$= \sqrt{\frac{V\!AR[X]}{200^2}} = \sqrt{\frac{200c}{200^2}} = \sqrt{\frac{c}{200}} .\text{ UPPSKATTAT}$$

$$\text{STANDARDFEL} = \sqrt{\frac{\hat{c}}{200}} = \sqrt{\frac{1{,}19}{200}} \approx 0{,}077$$

d. $c = \hat{c} \pm 2{,}58 \cdot 0{,}077 \quad (\approx 99\%)$

$\Leftrightarrow c = 1{,}19 \pm 0{,}199 \quad (\approx 99\%)$

FORTS. LÖSNINGAR MSG 110 25/10 2016 . OLLE NERMAN

7. $y = \alpha + \beta x + \varepsilon_i$ där $\varepsilon_i \sim N(0,1)$

a. ML-skattningen av β; $\hat{\beta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{3} (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^{3} (x_i - \bar{x})^2}$

Eftersom $\bar{x} = 2$ fås $\hat{\beta} = \dfrac{-3 \cdot 1{,}5 + 3 \cdot 4{,}1}{18} = 7{,}8/18$

$\hat{\alpha} = \bar{y} - 2\hat{\beta} = 2{,}8 - \dfrac{15{,}6}{18} \approx 1{,}93$

b. $\dfrac{\hat{\alpha} - 0}{\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{3} (x_i - \bar{x})^2}}} = \dfrac{\hat{\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{18}}} \sim N(0,1)$ om

H_0: $\alpha = 0$ är sann. Ett ensidigt test mot $H_1: \alpha > 0$ förkastar för

$\dfrac{\hat{\alpha}}{\sqrt{\frac{7}{18}}} \geq 1{,}65$, d.v.s. om $\hat{\alpha} \geq 1{,}029$.

H_0 förkastas och slutsatsen är att α verkar vara > 0.

FORTS. LÖSNINGAR MSG 110 (SANNOLIKHETSTEORI I) 25/10 2016. OLLE NERMAN

8. a. SANNOLIKHETSFUNKTIONEN KAN MAN BERÄKNA VIA X = ANTALET KLUSTER I EN SPELOMGÅNG

$$p_X(0) = \frac{\binom{97}{10}}{\binom{100}{10}} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{100 \cdot 99 \cdot 98} = \frac{356}{490}$$

$$p_X(1) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{97}{9}}{\binom{100}{10}} = \frac{3 \cdot 89}{1078}$$

$$p_X(2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{97}{8}}{\binom{100}{10}} = \frac{3 \cdot 9}{1078}$$

$$p_X(3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{97}{7}}{\binom{100}{10}} = \frac{2}{2695}$$

OM $X=0$ BLIR VINSTEN -100 (KRONOR)
OM $X=1$ —"— 50, 200 ELLER 400
OM $X=2$ —"— 350, 550 ELLER 700
OM $X=3$ —"— 850

LÅT Y = NETTOVINSTEN, DÅ BLIR

$$p_Y(-100) = \frac{356}{490}, \quad p_Y(50) = p_Y(200) = p_Y(400) = \frac{89}{1078}$$

$$p_Y(350) = p_Y(550) = p_Y(400) = \frac{9}{1078} \quad \text{OCH}$$

$$p_Y(850) = \frac{2}{2695}$$

b. $E[Y] = -100\,\frac{356}{490} + 50 \cdot \frac{89}{1078} + \ldots + 850\,\frac{2}{2695} = -5$

$VAR(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \left(100^2\,\frac{356}{490} + \ldots + 850^2\,\frac{2}{2695}\right) - 5^2 =$

$\approx 12{,}8536 \cdot 50^2 \approx 32159$

c. Totalvinst under 52 veckor $T \approx N(-5 \cdot 52,\ 52 \cdot 32159)$
$= N(-260,\ 1672273)$

$$P(T>0) = 1 - P(T \le 0) \approx 1 - \Phi\left(\frac{0-(-260)}{\sqrt{1672273}}\right) \approx$$

$$1 - \Phi(0{,}20) \approx 0{,}421$$